Einführungsbeispiel Hypothesentests

Die Firma Knopfloch AG stellt Knöpfe her.

Die Ausschussrate beträgt 1%.

Nach der Modernisierung der Maschinen soll die Ausschussrate nun auf höchstens $0{,}5\%$ gesunken ist.

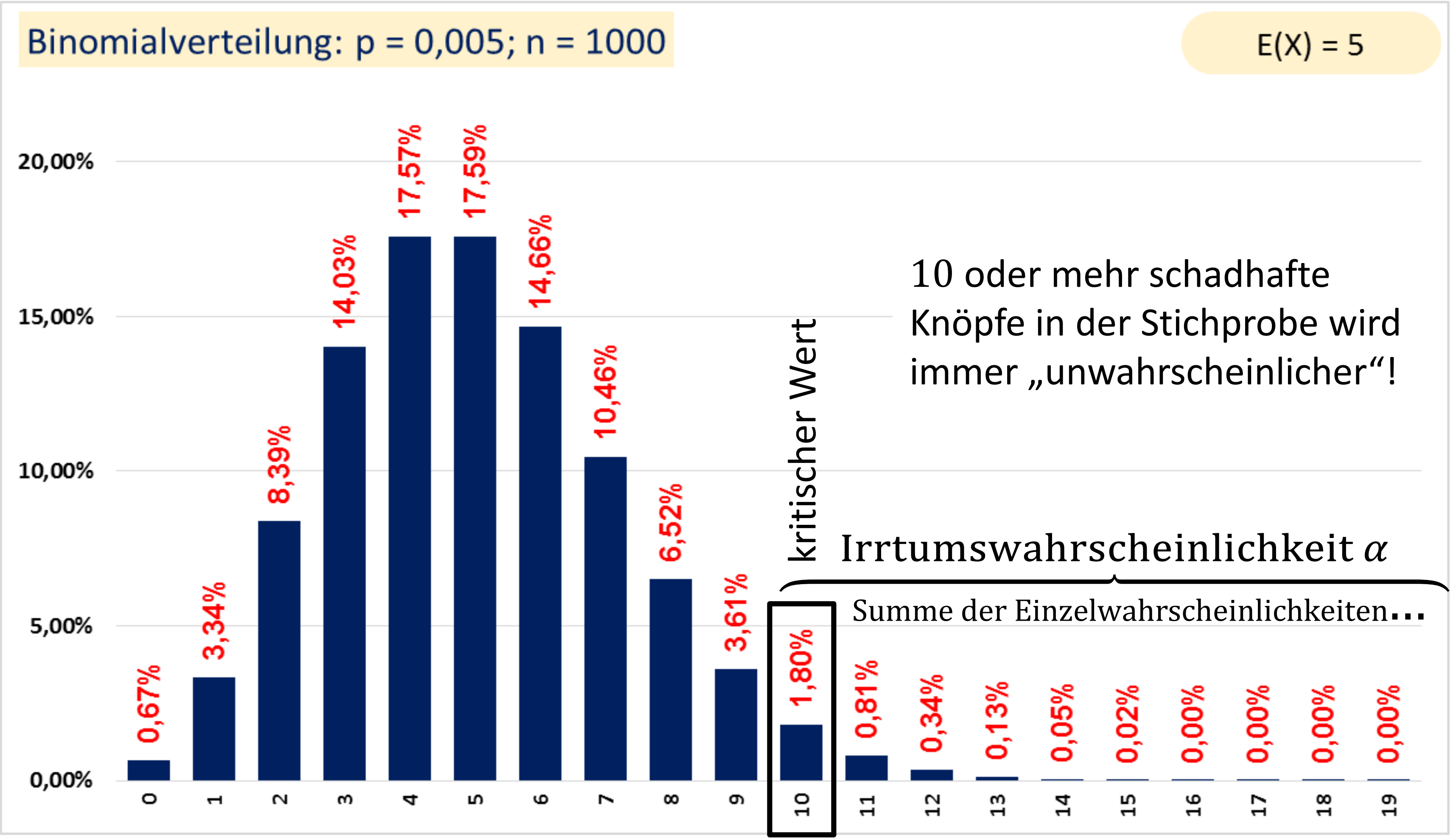
Dies nennt man die Nullhypothese H_0.

Wir, die Hemdenträger GmbH, wollen diese Aussage prüfen und fordern eine Stichprobe von 1000 Knöpfen.

In dieser Stichprobe befinden sich 9 schadhafte Knöpfe.

Sollen wir aufgrund dieser Daten nun die (oder der?) Behauptung der Knopfloch AG glauben?

Verteilung prüfen



Ablehnungsbereich

Wir veranschaulichen uns die Ws.verteilung wie in der vorherigen Folie und überlegen uns, ab wie vielen schadhaften Knöpfen wir die Behauptung (also die Nullhypothese H_0) ablehnen wollen.

Sagen wir mal ab 10 schadhaften Knöpfen.

Damit legen wir einen Ablehnungsbereich fest von $[10; 1000]$.

Die 10 ist sozusagen unsere „Schmerzgrenze".

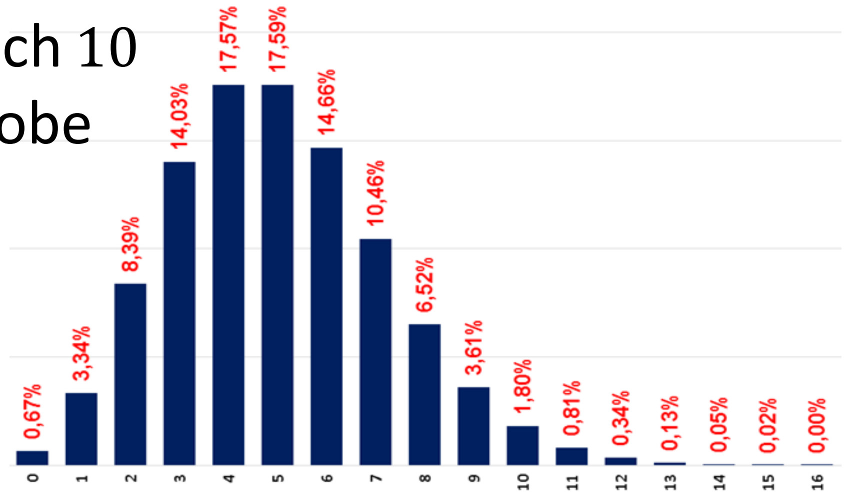
Das Gegenstück ist der Annahmebereich $[0; 9]$.

Wenn wir nämlich zwischen 0 und 9 schadhafte Knöpfe zählen, glauben wir der Knopfloch AG die Behauptung.

Irrtumswahrscheinlichkeit α

Angenommen wir finden tatsächlich 10 beschädigte Knöpfe in der Stichprobe und lehnen somit H_0 ab.

ABER: Wir könnten uns auch irren und die Behauptung zu Unrecht ablehnen!



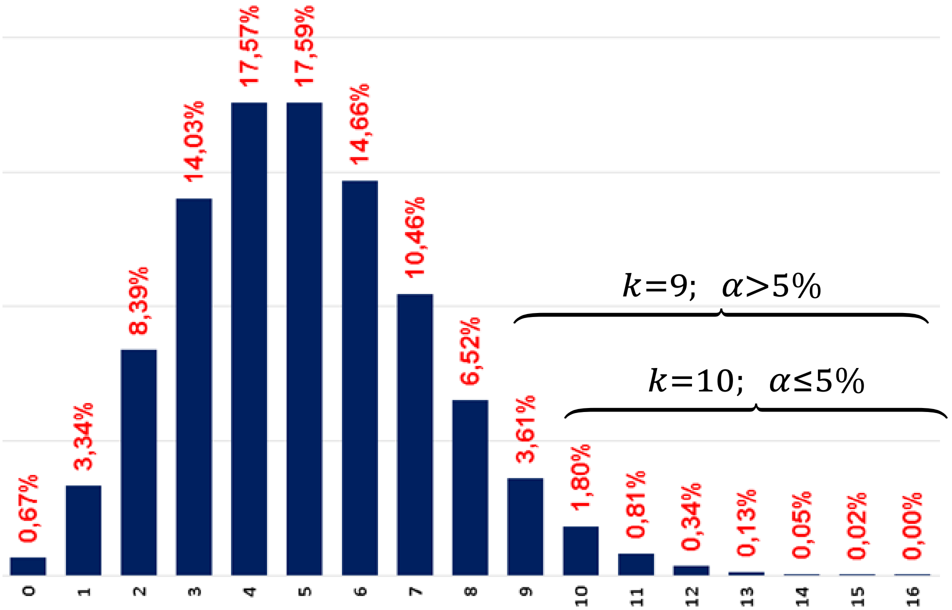
Wenn auch die WS gering ist, so kann es doch vorkommen, dass wir 10 schadhafte Knöpfe zählen!

Wie groß ist denn nun diese Irrtumswahrscheinlichkeit α?

Wir zählen einfach die Einzelws. für $10, 11, 12$ usw. schadhafter Knöpfe zusammen, berechnen also $\alpha = P(X \geq 10)$.

Wozu braucht man α?

Statt eine konkrete Anzahl k festzulegen, ab der man H_0 ablehnen sollte, könnte man auch eine Obergrenze für die Irrtumsws. α angeben.



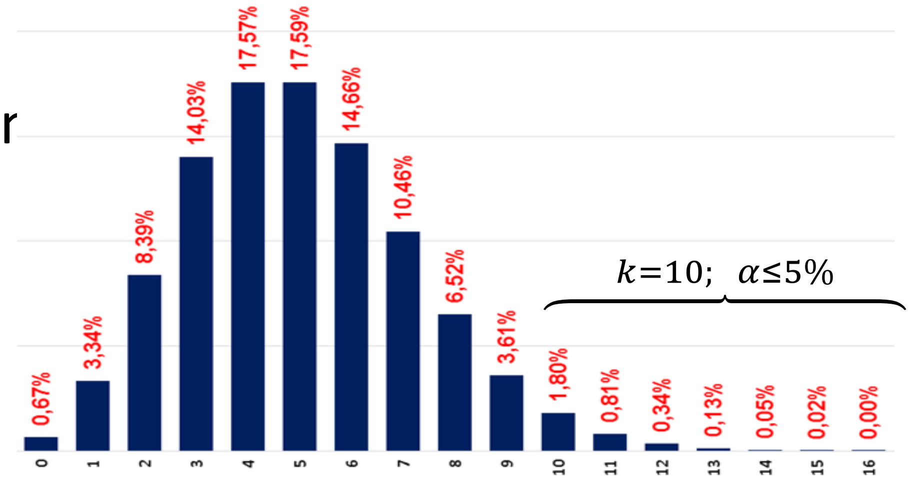
Man möchte sich also höchstens mit einer Ws. von α (meistens 5%) irren und H_0 zu unrecht ablehnen.

Mathematisch lautet die Aufgabe also:

Finde ein „erstes“ k, so dass $P(X \geq k) \leq \alpha$ gilt. Hier gilt $k = 10$.

Rechtsseitiger bzw. linksseitiger Test

In unserem Beispiel liegt der Ablehnungsbereich am rechten Ende der Ws.verteilung. Daher nennt man diese Art von Test einen rechtsseitigen Test.



In anderen Aufgabentypen liegt der Ablehnungsbereich am linken Ende. Dies ist dann ein linksseitiger Test.

Bei einem rechtsseitigen Test müssen wir ein k finden, so dass $P(X \geq k) \leq \alpha$ ist, bei einem linksseitigen Test suchen wir hingegen ein k, so dass $P(X \leq k) \leq \alpha$ ist.

Signifikanzniveau

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α nennt man auch das Signifikanzniveau.

Wenn wir also ein „falsches“ k wählen (in unserem Fall eine zu geringe Anzahl an beschädigten Knöpfen), dann überschreiten wir das Signifikanzniveau, d.h. es wird immer wahrscheinlicher, dass wir H_0 zu unrecht ablehnen.

Wählen wir $k = 9$ (beschädigte Knöpfe), so überschreiten wir das Signifikanzniveau.

Für $k = 10$ liegen wir unterhalb des Signifikanzniveaus, also unterhalb der Irrtumswahrscheinlichkeit.

Entscheidungsregel

Das Signifikanzniveau liefert uns somit eine Entscheidungsregel, d.h. eine Anzahl k (an schadhaften Knöpfen) ab der wir H_0 „guten Gewissens“ ablehnen können.

In unserem Beispiel lautet die Entscheidungsregel:

Wenn wir in einer Stichprobe von 1000 Knöpfen 10 oder mehr schadhafte Knöpfe finden, dann lehnen wir die Behauptung der Knopfloch AG, nämlich, dass die Ausschussrate unter $0{,}5\%$ liegt, ab!

Wir glauben dann vielmehr, dass die Ausschussrate größer ist, was man auch die Gegenhypothese nennt.

Allgemeine Beschreibung

Gegeben sei eine Stichprobe vom Umfang n.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl an Treffern an.

X sei binomialverteilt und die Trefferwahrscheinlichkeit sei p.

Manchmal ist eine Irrtumswahrscheinlichkeit α gegeben.

Je nach Aufgabentyp kann nun gesucht sein …

1. Ein Ablehnungs- oder Annahmebereich
2. Eine Entscheidungsregel
3. Das Signifikanzniveau (falls nicht gegeben)